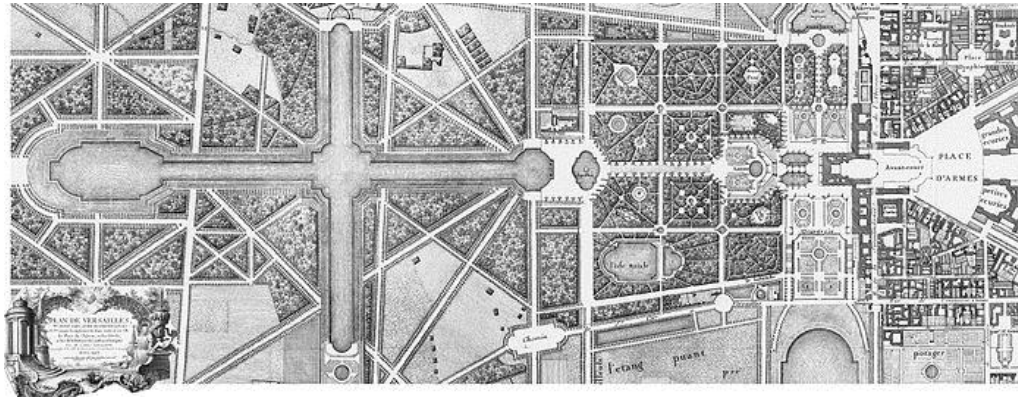




Les modèles mathématiques « hyperclassiques » de la science du 16^{ème} au 18^{ème} siècle.

La croissance de la population des mathématiciens est exponentielle, d'où la naissance d'une communauté de scientifique internationale.

Ci-dessus : plan du château de Versailles et des jardin 1746, par le géographe de Paris

I. Introduction

- Depuis que les mathématiques sont une science, et non plus seulement un ensemble de recettes techniques, la pensée suit des règles, qui la rendent rigoureuse. Exemple : règle de non-contradiction, règle de construction géométriques à la règle et au compas...etc. L'intuition devient scientifique dès lors qu'elle ne s'arrête pas devant ces règles et montre au contraire qu'elles sont utiles. Elle tire alors le meilleur d'elle-même.
- Cependant il suffit de lire les introductions de quelques ouvrages de grands auteurs (Cauchy, Euler...etc.) pour avoir le sentiment qu'ils redémontrent ce que leurs prédécesseurs ont démontré. N'était-ce donc pas encore assez rigoureux? Y avait-il encore trop de maladresse due aux conditions initiales de la découverte liées à l'usage de l'intuition? On voudrait que l'intuition puisse être mécanisée pour ne pas avoir à refaire son travail à chaque fois.

- On a de bons espoirs de progresser vers une mécanisation de l'intuition pendant le classicisme dès lors que :
 - On voit des nombres imaginaires prendre une certaine réalité, à côté des nombres réels.
 - On voit aussi des incréments arbitrairement petits, (ou encore des « fantômes de valeurs disparues », selon Berkeley) devenir l'objet du calcul rigoureux.
 - On voit le hasard domestiqué.
 - L'intuition scientifique est comme mise au défi par le dernier théorème de Fermat qui sera démontré 350 ans plus tard.
- Cependant, cette époque est, justement, celle où la « science » et surtout « la physique ») abandonne en grande partie les raisonnements basés sur l'intuition, et où elle découvre l'utilité de la pensée spéculative adaptée à l'observation. Sans abandonner l'observation, la physique devient mathématique.

Feuille de route

- I. Intro (supra)
- II. Le nouvel élan venu d'Italie.
- III. Développement des nouveaux modèles en Europe et au Japon (17°s.)
- IV. Destruction des idées reçues (18° s.)
- V. Conclusion.

II. Le nouvel élan en Occident

Giotto di Bondone (1266?-1337)

- Le campanile de Giotto à Florence résout le problème d'équilibre que posait déjà la tour de Pise.
- la tour de Pise penche à présent d'environ 4,50 m par rapport à la verticale et s'incline de plus en plus en direction du sud chaque année. L'édifice vieux de plus de 800 ans penche presque depuis sa construction (1174). Non seulement elle penche, mais elle s'enfonce dans le sol. Avec les technologies modernes on l'a stabilisée un peu, mais dans environ 175 ans, maintenant, elle aura disparue.
- En 1334 le peintre Giotto succède à Arnolfo comme architecte sur le chantier du campanile de Florence. Son projet global d'une hauteur totale de 110-115 m, prévoit un sommet pyramidal d'environ 30 m de haut, mais ce but ne fut jamais atteint, car il meurt en 1337 et laisse le chantier inachevé où il a posé les fondations et réalisé le 1^{er} étage. Le chantier sera repris par Pisano puis Talenti qui lui donna sa forme actuelle, et le fini en 1349.
- Si l'on se fie au projet de Giotto, le campanile de Florence aurait ressemblé à un gigantesque Obélisque.



Alberti, Della Francesca, Léonard de Vinci, et...



- Dans ses *Carnets* Léonard a noté un ensemble de réflexions sur les mathématiques. La peinture et la science sont indissociables souligne Léonard dans le *Traité de la peinture*, car la peinture est une synthèse de toutes les connaissances: Luca Pacioli a été le professeur de mathématiques de Léonard de Vinci.

« *Quelle est cette chose qui ne se donne point et qui, si elle se donnait, cesserait d'exister? C'est l'infini qui, s'il pouvait se donner, serait limité et fini, car ce qui peut se donner a une limite commune avec la chose qui l'entoure par ses extrémités, et qui ne peut se donner est ce qui n'a pas de limites* »

Ci-contre Alberti (1404-1472); vue de l'université de Bologne où Alberti fit sa formation



de Vinci

- « Tout nombre impair multiplié par un nombre impair reste impair. Tout nombre impair multiplié par un nombre pair devient pair. »
- « Les animaux qui tirent les chariots nous permettent une très simple démonstration de la quadrature du cercle, fournie par les roues de ces chariots au moyen de l'empreinte de la circonférence, laquelle forme une ligne droite. » (Carnets, Vinci, Tel Gallimard, p. 634, 641)
- Léonard applique, sans les citer, les méthodes d'Alberti dans la conception de ses peintures, c'est qu'ont remarqué bien des commentateurs.



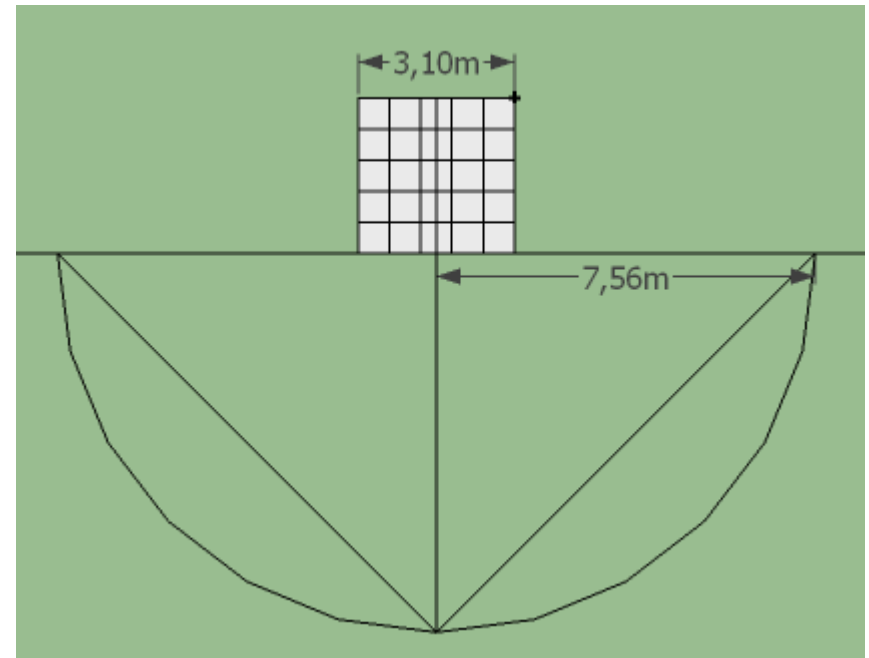
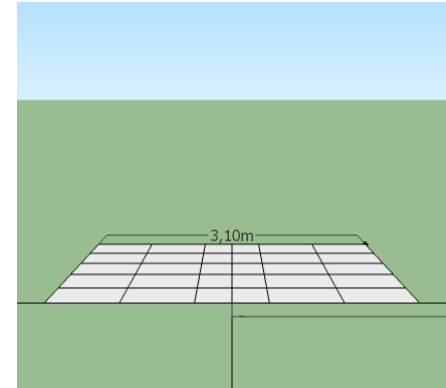
Ci-contre (gauche) autoportrait de Léonard de Vinci, (droite) François Ier (1515-1547) par Clouet, (bas à droite) Château du Clos Lucé, à Amboise, où de Vinci vécu 3 ans et mourut en 1519. (bas à gauche) A partir de 1528 François 1^{er} décide faire du Louvre le palais royal, qui était situé au palais l'île de la cité jusqu'à Charles V.



...Sketchup!



- Depuis 1435, date du *Traité de la peinture* d'Alberti, les peintres, en passant par Piero Della Francesca (1412-1492), Léonard de Vinci (1452-1519), les architectes, et plus tard les informaticiens pratiquent les deux méthodes d'Alberti, l'une vérifiant l'autre. Selon que l'objet à dessiner et la distance du peintre à cet objet, on choisit entre l'une ou l'autre : la méthode du rayon visuel ou celle de la diagonale du carré (l'une vérifiant l'autre).
- On peut observer aujourd'hui qu'un logiciel de dessin 3D (Sketchup) semble confirmer spontanément la méthode d'Alberti. Ces inventions techniques anticipent la géométrie projective qui elle naîtra au 17^e siècle avec Girard Desargues en particulier.



Nicolas Copernic (1473-1543)

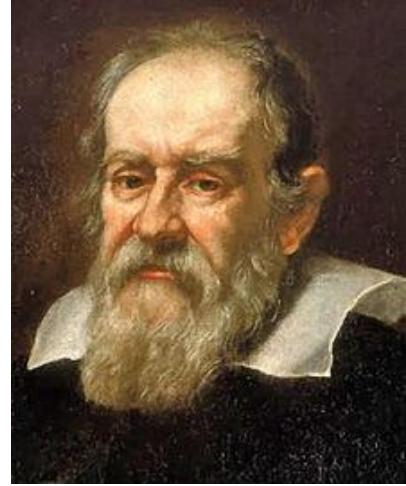


- Il est polonais et fait ses études à l'université de Padoue.
- Blaise Pascal dira de lui : « *Je trouve bon qu'on n'approfondisse pas l'opinion de Copernic, mais ceci : Il importe à toute la vie de savoir si l'âme est mortelle ou immortelle* » (*Les Pensées*)
- L'article écrit par d'Alembert dans l'Encyclopédie sur Copernic résume la polémique que ses idées ont provoqué : « *En Italie il est défendu de soutenir le système de Copernic qu'on regarde comme contraire à l'Écriture à cause du mouvement de la Terre que ce système suppose. Le grand Galilée fut autrefois mis à l'inquisition, et son opinion du mouvement de la Terre condamnée comme hérétique...Cet événement effraya tellement Descartes, très soumis au Saint Siège, qu'il l'empêcha de publier son traité du monde qui était prêt à voir le jour.* »
- Newton dans son livre sur les *Principes de la philosophie naturelle*, analyse et dépasse entièrement les idées de Descartes sur les tourbillons.
- Comment les écrits de Descartes ont pu semer l'hérésie ou l'athéisme par leur nouveauté? C'est ce que tente d'expliquer le biographe luthérien de Spinoza. Cependant M. de Spinoza a justifié « géométriquement » les *Principes* de M. Descartes, partant celui-là devait être de quelque manière plus cartésien que celui-ci ou que les autres cartésiens.

Ci-contre : vue de l'université de Padoue.



Galilée, *Galileo Galilei* (1564-1642)



- Il fait ses études à l'université de Pise, sa ville de naissance (comme Céva plus tard).
- Citation : « *Et pourtant, elle tourne* ». Galilée a prononcé cette phrase alors qu'il était condamné par l'Eglise et obligé de reconnaître la fausseté de la doctrine héliocentriste.
- « *La nature est écrite en langage des mathématiques* » (Galilée) : un retour au platonisme, après plus de mille ans d'aristotélisme pendant le Moyen Age ? Ainsi Aristote se base sur l'intuition en écrivant : « Le corps en mouvement s'arrête quand la force qui le pousse ne peut plus agir de façon à le pousser ». Tandis que Galilée voit là une erreur en se fiant à la pensée spéculative d'abord, il conçoit une expérience idéalisée, impossible à réaliser, celle d'un corps se déplaçant sans frottement: en ce cas il continuera à se mouvoir sans cesse. C'est la loi d'inertie dont Newton tirera toutes les conséquences.
- Cet exemple montre les limites d'un raisonnement basé sur l'intuition.
- Plus tard Bonaventura Cavalieri, élève de Galilée, énoncera encore, en 1629 le principe appliqué au parallélépipède que des prismes, ou des cylindres, ayant la même section et la même hauteur ont le même volume.

Ci-contre : Université de Pise, et horloge astronomique du frère Bernardin à Ploermel, qui montre que les lois de Kepler et les principes de Galilée sont aujourd'hui (depuis le 19^{ème} siècle) enseignés dans les écoles monacales.



Galilée

- Pour faire bonne mesure Newton, à la fin des *Principes de philosophie naturelle* (1686) citera un passage de la *Métaphysique* où Aristote fait la description d'une comète.
- « *On ne peut rien apprendre aux autres, on peut seulement les aider à découvrir ce qu'ils cherchent déjà par eux-mêmes* ».)

Ci-contre vue de Pise. Remarque générale: L'avancée de la révolution galiléenne n'empêche pas certains de penser toujours comme dans un monde clos : que ce soit Heidegger qui volontairement a tenté de réactiver le geste initiateur de la pensée grecque, ou que ce soit en physique moderne lorsque Hilton et Griffiths écrivent : « the estimated number 10^{79} of protons and electrons in the universe » (A comprehensive textbook of classical mathematics , p.62 , 1970)



Galilée

- Il s'est également intéressé à la probabilité en trouvant l'explication d'un fait observé : Lorsqu'on lance 3 dés et que l'on parie sur la somme des résultats, il vaut mieux choisir 10 que 9. Un total égal à 10 arrive plus fréquemment qu'un total égal à 9. Et, pourtant il y a autant de combinaisons qui donnent 9 ou 10.

En effet, Galilée montre que les combinaisons ne sont pas équivalentes (3; 3; 3) ne peut être produit que d'une seule façon, alors que (1;2; 6) peut être produit de 6 façons différentes.

Ci-contre : Peinture de Georges de la Tour (1593-1652), Le tricheur à l'as de carreau.



Johannes Kepler (1571-1630)



- Citation : « *If anyone thinks that the obscurity of this representation arises from the perplexity of my mind,...I urge any such person to read the Conics of Apollonius. He will see that there are some matters which no mind, however gifted, can present in such a way as to be understood in a cursory reading. There is need of meditation, and a close thinking through of what is said .* » Kepler in *New Astronomy* (translation by Donahue).
- Kepler est copernicien, il collabore avec **Tycho Brahe** dont les instruments sont les plus précis de l'époque, afin de créer une cosmologie en accord avec l'observation. L'étude des données obtenues par Brahe le conduit énoncer ce qu'on appelle les 3 lois de Kepler, que Newton expliquera comme des conséquences de la gravité et de l'inertie des corps en mouvement.
 - Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers;
 - Le rayon vecteur joignant le centre du Soleil au centre d'une planète balaie des aires égales en temps égaux
 - Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.

Ci-contre copie d'un portrait perdu peint en 1610, conservé chez les Bénédictin de Krems ; (bas) vue de Tübingen Stiff lieu de formation de Kepler.



Le langage algébrique

- Avant arrivée de de Viète les notations algébriques sont encore relativement lourdes:
- Ex: pour écrire « $4x^3 - 5x^2 = 10x + 3$ » on notait « *4Cm5Q aequatur 10Rp3* », C désignant le cube (*cubus* en latin), Q le carré (*quadratus*), R l'inconnue (la chose, *res*), *p* et *m* plus et moins, *aequatur* signifiant « égale ».

Niccolo Fontana Tartaglia (dit le « Bègue ») (1499-1557)



- Niccolo Fontana dit Tartaglia né à Brescia en 1499 et mort à Venise en 1557 est issu d'une famille pauvre, laissé pour mort avec une fracture d'un crâne à l'âge de 12 ans, lors de la prise de Brescia par les Français en 1512 (Il reçu un coup de sabre dans la bouche, d'où son défaut d'élocution). Une fois remis de ses blessures sa mère ne peut plus payer l'école, il vole alors des livres et des cahiers pour apprendre tout seul. Puis il gagne d'abord sa vie comme enseignant en mathématiques, ensuite il est comptable de la République de Venise. Il traduit les œuvres d'Archimède. On lui doit d'avoir trouvé une formule générale de résolution des équations du 3^e degré, et quelques travaux en balistique.
- *« Un homme vient de mourir en laissant un troupeau de 17 chevaux, qui doivent répartis entre ses trois fils héritiers dans la proportion $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$. Comment peuvent-ils procéder au partage? »*



Ci-contre vue de Brescia ville d'origine de Tartaglia; (bas) vue de Milan où il rencontre Cardan

Cardan (1501-1576)



- Résolution des équations du 3° degré: *L'idée géniale de Scipione del Ferro (1465-1526) reprise par Tartaglia et développée par Cardan dans le tableau ci-contre.*
- **Girolamo Cardano** (né à Pavie 1501, mort à Rome 1576) a été enseignant en mathématiques et médecin. Il est accusé d'hérésie. A Milan il « vole » la formule à Tartaglia, qui voulait la garder secrète, et la publie dans son *Ars magna* en 1545.
- Avec cette formule magique Niccolo Fontana emportait des concours primés de défis mathématiques.

Formules	Conditions
$x^3 + cx = d$	avec coefficients positifs
$x = u + v$	en choisissant pour u et v des termes qui contiennent un cube
$d = u^3 + v^3$	Somme de u^3 et v^3
$-c^3/27 = u^3 \cdot v^3$	Produit de u^3 et v^3
$x = (d/2 + ((c/3)^3 + (d/2)^2)^{1/2})^{1/3} + (d/2 - ((c/3)^3 + (d/2)^2)^{1/2})^{1/3}$	Formule de Cardan permettant de calculer l'une des solutions (et déduire les autres)

Bombelli



- **Raphaelle Bombelli** ingénieur bolognais (1526-1572) a consigné les premières règles de calcul sur les nombres complexes dans *Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*.
- *Voici comment* Bombelli découvre les premiers nombres imaginaires, et il remarque qu'ils permettent de trouver des résultats correctes.
- Ex: Résoudre l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, Bombelli suit le raisonnement consigné dans le tableau ci-contre (Toutefois il ne s'intéressait pas aux solutions négatives de la dernière ligne).

Ci-dessus : Vue de Bologne

input	output
Posons $x = u + v$, et remplaçons x en utilisant l'identité remarquable: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (on vérifierait avec le binôme de Newton aujourd'hui).	$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 15(u+v) + 4$
Simplifions l'équation en posant $uv=5$.	$u^3 + v^3 = 4$
Changeons d'inconnue en posant $U=u^3$, et $V=v^3$.	$U+V= 4$, et $UV=125$
Dans un tel système U est solution d'une équation du second degré : $U^2 - 4U + 125=0$,	$(U-2)^2 = -121$ « forme canonique »
Bombelli note $11(-1)^{(1/2)}$ la racine carrée de -121	$U= 2+11(-1)^{(1/2)}$, $V= 2-11(-1)^{(1/2)}$
Or $(2+ (-1)^{(1/2)})^3 = 2+ 11(-1)^{(1/2)}$, donc on revient aux variables de départ	$u= 2 + (-1)^{(1/2)}$, et $v= 2 - (-1)^{(1/2)}$, et de là $x= 4$
ce n'est pas la seule solution, on factorise $(x-4)(x^2+4x+1) = x^3-15x-4$ pour trouver les solutions de l'équation du second degré	$x= -2 \pm 3^{(1/2)}$,

Lodovico Ferrari

- Né à Bologne (1522-1565), il arrive à la maison de Cardan comme domestique à 14 ans. Après avoir remarqué ses dispositions Cardan le dispense des tâches ménagères et lui enseigne les maths. En 1540 lorsque Cardan démissionna de la Fondation Piatti à Milan, Ferrari récupéra son poste en évinçant son seul rival dans un débat, il devint ainsi conférencier en géométrie à 18 ans.
- Pour résoudre une équation du 4^o degré, il la met sous la forme $(ax^2+bx+c)^2=(dx^2+ex+f)^2$, ce qui l'amène à résoudre un deux équations du second degré.
- Ci-contre exemple pour l'équation $x^4-12x+3=0$

Principe	Application
Il introduit la quantité auxiliaire t pour réécrire l'équation	$(x^2+t)^2=2tx^2+12x+t^2-3$
Il cherche t de sorte que le second membre soit un carré parfait, ce qui correspond à un déterminant nul	$144-8t(t^2-3)=0$
Nous sommes conduits à résoudre « l'équation résolvante » de 3 ^o degré	$t^3-3t-18=0$
En général on peut lui appliquer la méthode Cardan, mais c'est inutile ici car t=3 est solution. De là on réécrit l'équation de départ	$(x^2+3)^2=6(x+1)^2,$
Il reste à résoudre deux équations	$x^2+6^{(1/2)}x+3+6^{(1/2)}=0$, et $x^2-6^{(1/2)}x+3+6^{(1/2)}=0$
La première a deux solutions réelles	$x = (6^{(1/2)} \pm (4 \cdot 6^{(1/2)} - 6)^{(1/2)}) / 2$

François Viète

(1540-1603)

- Mathématicien à ses heures perdues, juriste de métier (1540-1603), il a écrit *Supplementum geometriae*. Il a étudié à l'université de Poitiers comme Descartes après lui.
- Viète utilise les voyelles pour désigner les inconnues, et les consonnes pour désigner les quantités fixes. Il utilise des notations algébriques proches des nôtres : *Acubus* (a^3); *equalis* (pour le signe =); *A in B* (pour axb); +, -, / (pour les opérations arithmétiques)

Ci-contre Viète; (bas) Fontenay le comte ville d'origine de Viète; (droite) Henri II (1547-1559) par Clouet.



François Viète.

- Viète comprend parfaitement les méthodes innovantes de Bombelli, Cardan, Ferrari, et il pressent un *théorème fondamental de l'algèbre* (énoncé par d'Alembert, et démontré par Gauss)
- Il remarque qu'il existe entre les racines et les coefficients d'une équation des relations.
- En 1595, le mathématicien flamand Adrien Romain mit la communauté scientifique au défi de résoudre une énorme équation de degré 45. Viète en trouve, par une astuce, aussitôt les 23 racines positives.

Ci-contre vue de Fontenay le comte

	Si...	...Alors, on vérifie :
Pour le second degré	Les racines de l'équation $x^2+px+q=0$ sont notées x , et x'	1) $x+x' = -p$ 2) $x.x' = q$
Pour le 3 ^e degré	Les racines de l'équation $x^3+px^2+qx+r=0$, sont notées x , x' , et x''	1) $x+x'+x'' = -p$ 2) $x.x'.x'' = -r$ 3) La somme des produits deux à deux des racines vaut q



II. Développement de nouveaux modèles.

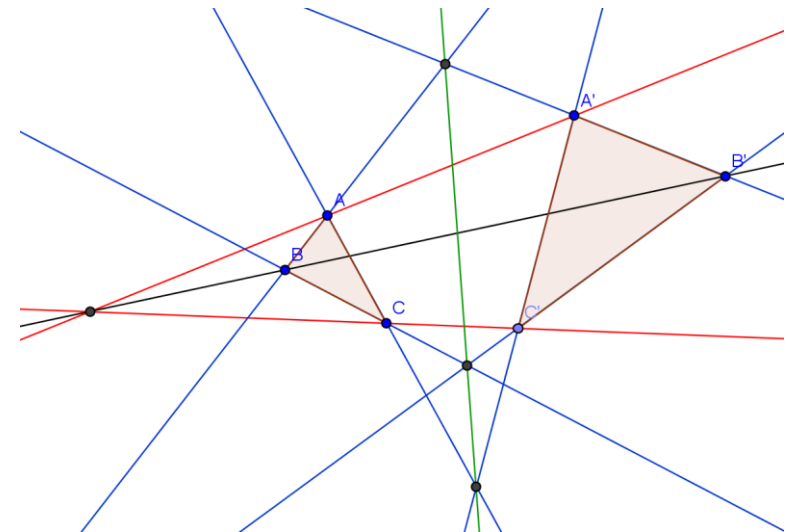
- 1) L'analyse
- 2) La probabilité

Girard Desargues (1591-1661)



- Il invente la notion de point à l'infini comme point d'intersection de 2 droites parallèles.
- On lui doit un théorème fondamental en géométrie projective : « Lorsque 2 triangles ABC et $A'B'C'$ sont tels que (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes, alors leurs côtés se coupent en des points alignés. »

Ci-contre (droite) Desargues est aussi contemporain d'Henri IV roi des français, Henri de Navarre 1589-1610 (à ne pas confondre avec deux homonymes (1) Henri IV empereur du St empire romain germanique 1084 - 1105 couronné à Aix-la-Chapelle –jusqu'en 1562 30 princes allemands furent couronnés à Aix-la-Chapelle- en 1054 par son père Henri III qui meurt en 1056 et lui laisse le trône, de sa vie est tirée une pièce de théâtre de Pirandello, ni à confondre avec (2) Henri IV d'Angleterre (Henri Bolingbroke successeur de Richard II, et qui régna de 1596 à 1598) sur qui Shakespeare a écrit deux pièces de théâtre) ; (bas) vue de Lyon ville d'origine de Desargues.



John Napier, Henry Briggs



- John Neper ou Napier, théologien protestant (1550-1617) est à l'origine des tables de logarithmes népériens ou « logarithmes naturels », Briggs, son contemporain, développera à partir de là les logarithmes en base 10.
- Johann Kepler déclarera que sans les logarithmes il ne serait pas venu à bout des calculs fastidieux exigés par les recherches sur les orbites planétaires. Avant l'arrivée des ordinateurs cet outil est indispensable à des milliers de chercheurs.

Ci-contre Neper; (bas) Vue d'Edimbourg ville de Neper.



Neper, Briggs

- Il y a 7 opérations en arithmétique, les écoliers apprennent la dernière opération l'année du Bac : addition; soustraction ; multiplication; division ; élévation à une puissance; recherche de la racine; recherche de la puissance (logarithme).
- On remarque que chaque opération a son inverse (la soustraction est l'inverse de l'addition), mais l'élévation à une puissance a deux opérations inverses.
- Citation de Laplace : « *l'invention des logarithmes, réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes* ».

Ci-contre : vue d'Edimbourg ville d'origine de Neper.



Bachet de Méziriac (1581-1638)

- Il a écrit *Problèmes plaisants et délectables, qui se font par les nombres*. En voici un :
- « Un enfant possède un euro qu'il désire dépenser entièrement en achetant des bonbons à 8 centimes et des bonbons à 5 centimes. Est-ce possible? Si oui, combien de possibilités? »
- Il faut poser une équation de Diophante : $8x+5y=100$ que l'on résout avec le « *théorème de Bézout* » (qui, en fait, est de Bachet) (voir plus loin). On trouve 3 couples de solution (10;4), (5;12), (0;20).



Ci-contre (à gauche) Bachet de Méziriac, (à droite) Louis XIII (1610-1643) par Champaigne, au Louvre, (en bas) Louis XIV (1643-1715) par Rigaud en costume de sacre, au Louvre ; (bas) Vue de Bourg en Bresse ville originaire de Bachet (Rhône Alpes)



Pierre de Fermat (1601-1665)



- Fermat était magistrat, et il s'est consacré plus tard aux maths, pendant ses loisirs.
- Il a laissé une correspondance importante avec une société de savants émergents, des lettres truffées d'énigmes.
- Apparemment, Pascal n'a pas dû apprécier ces échanges, car il dira : « *J'avais passé longtemps dans l'étude des sciences abstraites, et le peu de communication qu'on en peut avoir m'en avait dégouté. Quand j'ai commencé l'étude de l'homme, j'ai vu que ces sciences abstraites ne sont pas faites pour l'homme...* » (*Les Pensées*)
- Le principe de Fermat en optique géométrique est que la lumière suit toujours le plus court chemin d'un point à un autre. Cette observation permet de prédire le trajet de la lumière d'un point dans un milieu comme l'air, à un autre point dans un autre milieu comme l'eau.

Ci-contre : vue de Beaumont de Lomagne (près de Montauban) ville originaire de Fermat qui mourra à Castres.

Petit théo de Fermat	Si p est un nombre premier et n un entier naturel non divisible par p , alors $n^{p-1} - 1$ est divisible par p
Corollaire	Si p est un nombre premier alors $n^p - n$ est divisible par p .
Théo de Fermat	Tout nombre premier de la forme $4n+1$ est somme de 2 carrés
Théo Fermat-Lagrange	Tout entier est somme de 4 carrés.
Théo Fermat-Wiles	$x^n + y^n = z^n$, n'a pas de solutions entières hormis pour $n=2$



Le chemin d'Andrew Wiles en 3 étapes.



- C'est en marge d'un livre de Diophante d'Alexandrie, *Arithmétiques*, traduit par Bachet de Méziriac en 1621 qu'il fit une conjecture célèbre, prouvée seulement 350 ans plus tard en 1993 par Andrew Wiles.
- Voyons l'intuition scientifique à l'œuvre à présent au XXème siècle:
- Arrivée à Cambridge en licence de maths Wiles a un coach sur la théorie d'Iwasawa pour analyser les courbes elliptiques (ni courbes, ni ellipses).
- Taniama, élève de Shimoura, fait un postulat (1955) : « Toute courbe elliptique est modulaire déguisée ».
- 1985 G. Frei construit un argument plausible : « Si une solution entière existe différente 2 à $x^n + y^n = z^n$, alors on peut créer une courbe elliptique non modulaire ». Donc si Fermat a tort, alors Shimoura-Taniama aussi.
- Kent prouve la conjecture epsilon de Frei, dès lors Wiles n'a plus qu'à prouver la conjecture Taniama-Shimoura (Wiles n'utilise jamais d'ordinateur).



Ci-contre Andrew Wiles (droite); (bas) Université de Cambridge

Etape 1

- L'astuce de Wiles consiste à transformer les courbes elliptiques en représentation de Gallois, ce qui rend le calcul plus facile, en permettant de comparer les formes modulaires avec les représentations Gallois, et non plus avec les courbes elliptiques.
- Wiles peut ainsi compter les courbes elliptiques (remplacée par des représentations de Gallois) et voir si elles sont en nombre égal aux formes modulaires. Ce que personne n'arrivait à faire. Wiles trouve donc une méthode de comptage appliquée au problème modifié et non pas au problème original.



Etape 2

- Wiles espère que la théorie d'Iwasawa pourra ensuite être utilisée pour parachever sa méthode de comptage. Il trouve alors une formule de classe de nombres établie dans un article de Flach et Kolyvagen. Cependant il arrive à vérifier ainsi que la plupart des courbes sont modulaires sauf un petit nombre passé entre les mailles.
- Un article de B. Mazure va encore lui donner l'idée de passer de la famille de courbes (étudier avec le nombre premier 3) dont il ne pouvait montrer qu'elles étaient modulaires à une autre famille (étudiée avec le nombre premier 5) dont il avait déjà montré qu'elles l'étaient, pour utiliser cette information pour la dernière étape.



Etape 3 (1993)

- Une erreur apparaît après la conférence, venant de la méthode de Flach et Kolyvagen que Wiles a reprise. Donc il reprend leur méthode originale pour voir exactement pourquoi cela ne marche pas. C'est presque impossible à faire en maths, et pourtant il s'agit d'être certain que cela ne marche pas.
- Il réalise que ce qui le bloque c'est aussi ce qui résoudrait le problème qu'il avait rencontré avec la théorie d'Iwasawa 3 ans auparavant. C'est ce qui rendait la théorie d'Iwasawa horizontale. Ce pourquoi il l'avait abandonnée.
- C'est ainsi que la conjecture de Fermat fut prouvée.



Blaise Pascal (1623-1662)



- Il invente la machine à calculer en 1642-1643 : « *La machine d'arithmétique fait des effets qui approchent plus de la pensée que tout ce que font les animaux. Mais elle ne fait rien qui puisse faire dire qu'elle a de la volonté, comme les animaux* » (Les Pensées)
- Il a écrit aussi un traité *Potestam numericarum Summa* (1654) où il expose une méthode pour calculer l'air d'une parabole comme **Cavalieri**, et **Roberval**.
- Pascal et Fermat ont posé les bases du calcul des probabilités à travers leur correspondance. Au départ Pascal répondait à un problème soulevé par le Chevalier de Méré à la cour de Louis XIV : « Comment partager les enjeux, quand une partie est interrompue avant son terme normal? » Pascal prévoyait d'écrire un traité sur la « géométrie du hasard » en 1654. Après le « pari de Pascal » il se désintéressa des jeux mondains.
- Du coup le premier ouvrage de probabilités est de Christian Huygens et paraît en 1667 sous le titre *Tractatus de Ratiociniis in Aleae Ludo*.

Ci-contre le « triangle de Pascal », célèbre pour l'utilisation que Pascal en a fait. En 1303 le mathématicien chinois Zhu Shi Jie, et vers 1400 le mathématicien arabe Al Kashi s'en servaient déjà.

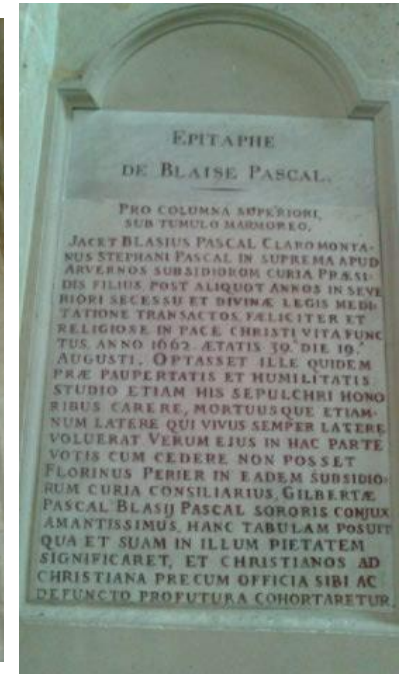
Triangle de Pascal ...

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

...Vérifie la relation de Pascal permettant

- 1) de calculer un coefficient binomial, le nombre de combinaisons n de p éléments dans un ensemble E ,
- 2) D'appliquer le binôme de Newton pour calculer $(a+b)^n$, pour n entier naturel non nul, et a et b deux nombres complexes.
- 3) D'appliquer la loi binomiale de paramètres n et p à une variable aléatoire pour calculer $P(X=k)$

- Ci-contre (à gauche) statue de Pascal à la tour gothique de St Jacques, à Paris, où l'on suppose qu'il est passé et aurait fait des expériences sur la gravité pour vérifier les résultats de Galilée, à l'instar, plus tard, de Newton à Londres (au 17^{ème} siècle) au sommet du clocher de l'église St John. Au 19^{ème} la tour sert à une usine de fabrication de plombs de chasse qui projette du sommet du plomb liquide recueilli dans une bassine au niveau où se trouve actuellement la statue de Pascal. Puis la tour servira aussi à météo-France pour faire des relevés jusqu'en 2006. (à droite) Epitaphe à l'église St-Etienne-du-Mont, 5^{ème} arr. Paris (Montagne St-Geneviève) où il est enterré à côté de Jean Racine. Il est vrai que Pascal n'avait que 18 ans lorsqu'il commença à mettre au point la première machine à calculer. Il est né à Clermont Ferrand, mais il monte à Paris avec son père lorsqu'il est encore enfant.



Marin Mersenne

(1588-1648)



- Le plus grand nombre premier connu à ce jour est un nombre premier Mersenne : $2^{42643801} - 1$, découvert en 2009. C'est le 47^e nombre premier Mersenne connu, il possède 13 millions de chiffres.
- On appelle nombres de Mersenne les nombres suivant 2^2-1 ; 2^3-1 ; 2^4-1 ; 2^5-1 ;... Ils sont de la forme 2^p-1 .
- Pour qu'un nombre de Mersenne soit premier il faut que p soit premier, mais cela ne suffit pas. Ainsi $2^{11}-1=2047 = 23 \times 89$ est un nombre composé et non pas premier, alors que $2^{13}-1 = 8191$ est un nombre premier.
- La course est donnée pour la découverte du 48^e nombre premier de Mersenne. *L'Electronic Frontier foundation* offre des prix de calcul coopératif pour encourager les internautes à contribuer à plusieurs ordinateurs à le trouver. 50 000 dollars pour la découverte d'un nombre premier d'au moins un million de chiffres ont été remportés en 2000 par le GIMPS. Il reste un prix de 150 000 dollars pour la découverte d'un nombre premier d'au moins 100 millions de chiffres.



Ci-contre : Au collège Henry IV de La Flèche, où Mersenne a étudié en même temps de Descartes.

René Descartes

- Il fait ses études au collège de la Flèche (Pays de la Loire), puis l'université de Poitiers.
- Après quoi il voyage et s'arrête à Amsterdam où il écrit le *Discours de la méthode* (1637), dont une annexe *La Géométrie* va changer l'histoire des mathématiques.
- Descartes y propose une façon de définir des figures géométriques au moyen de formules algébriques. Il définit le repère d'une droite.
- Euler introduira plus tard le second axe et nous aurons un axe pour les abscisses et un pour les ordonnées. Mais, c'est déjà une application que l'on trouve chez Newton. (les axes des abscisses et des ordonnées, par contre, ne sont pas indépendants des configurations étudiées, Newton choisit deux côtés de la figure qu'il étudie et il s'en sert pour mesurer l'ordonnée et l'abscisse de chaque point.)
- C'était déjà pratiquement ce que Oresme faisait au Moyen Age,



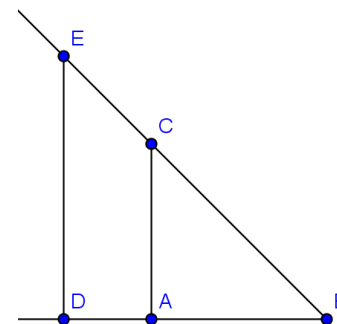
Ci-contre vue d'Amsterdam

René Descartes (1596-1650)



- Descartes n'est pas facile à comprendre malgré l'apparence d'évidence, car il n'écrit pas tout ce qu'il pense. C'est pourquoi tellement d'interprétations tournent autour du sujet.
- Descartes commence sa *Géométrie* en remarquant que tous les problèmes de géométrie ordinaire reviennent à 4 figures où il explique comment faire une multiplication graphiquement, ou bien une division, ou bien extraire une racine carrée, ou comment résoudre graphiquement un problème qu'on a mis en équation.

Exemple ci-contre : (en haut) La première figure de la Géométrie de Descartes montre comment faire une multiplication graphiquement; (bas) vue d'Amsterdam.



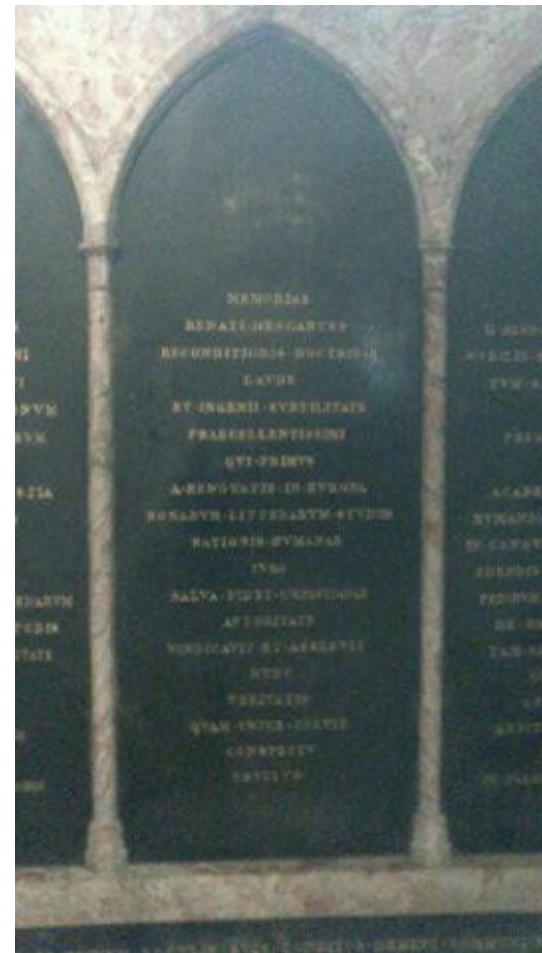
Pour multiplier BD et BC, en prenant AB pour unité, il suffit de joindre A et C, puis la parallèle à (AC) passant par D coupe (BC) en E. BE est le résultat de cette multiplication



Descartes



- La première idée de Descartes est de rapporter, dans sa méthode, l'arithmétique aux opérations de Géométrie (et non l'inverse). Est-ce que nous avons bien suivie la méthode de Descartes, si la géométrie semble se réduire aujourd'hui à une étude des équations algébriques comme le remarque H. Lebesgue (*Leçons sur les constructions géométriques*)?
- *Ci-contre début du mémorial de Descartes à Saint Germain des prés dont le texte entier est le suivant : « Memoriae Renati Descartes reconditoris doctrinae laude et ingenii subtilitate praecellentissimi qui primus a renovatis in Europa honorum litterarum studiis rationis humanae iura salva fidei christianae auctoritate vindicavit et asservit nunc seritatis quam unice colvit conspectu fruitur ».*



Descartes

- « *Ce que je ne crois pas que les anciens aient remarqué, car autrement ils n'eussent pas pris la peine d'en écrire tant de gros livres, où le seul ordre de leurs propositions nous fait connaître qu'ils n'ont point eu la vraie méthode pour les trouver toutes, mais qu'ils ont seulement ramassé celles qu'ils ont rencontrées.* »
(Géométrie, R. Descartes)

Ci-contre : vue de Stockholm où Descartes a fini ses jours

D'où les noms	
Equation cartésienne d'une droite	$ax+by+c=0$, avec a et b des constantes différentes de 0, et les coordonnées cartésiennes x et y des points du cercle
Equation cartésienne d'un cercle	Un cercle de centre $I(a;b)$, et de rayon R a une équation : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
Equation cartésienne d'un plan	$ax+by+cz+d=0$, avec a, b, c , des nombres différents de 0
Produit cartésien de deux ensembles E et F	L'ensemble des couples (x, y) où x appartient à E et y à F



Benoît de Spinoza (1632-1677)



- En général on oublie la particule « de ».
- Il a écrit *l'Ethique démontrée selon l'ordre géométrique*, qui n'est pas un livre de mathématiques, cependant il soutient l'idée encore nouvelle que l'univers est infini, puisque qu'il dit que Dieu est infini et qu'il est immanent à l'univers et non pas extérieur et transcendant. Ainsi l'idée en germe chez Galilée déjà, que le monde n'est pas clos, est exprimée clairement, et le livre de Spinoza permet aussi de comprendre l'impact qu'une telle idée peut avoir sur l'évolution des mentalités.
- *L'ouvrage de Spinoza Traité théologico-politique qui remet en cause l'autorité des interprétations traditionnelles de la Bible, dans le même ordre d'idée que le Tartuffe (1664) de Molière, éclaire certaines difficultés profondes que peut rencontrer l'enseignant en mathématiques dans un établissement privé catholique, dans la mesure où on évalue son autorité en fonction d'une certaine représentation de l'autorité traditionnelle. Lorsqu'on visite les temples ptolémaïques égyptiens on voit comment la religion était utilisée pour gouverner: des cachettes sont visibles où un prêtre descendait pour faire la voix du dieu que le pharaon devait entendre après s'être purifié.*



Ci- contre vue de La Haye.

LE
TARTUFFE,
OU
L'IMPOSTEUR,
COMEDIE.
PAR I. B. P. DE MOLIERE.



Imprimé aux dépens de l'Auteur, & se vend
A PARIS,
Chez JEAN RIBOU, au Palais, vis-à-vis
la Porte de l'Eglise de la Sainte Chapelle,
à l'Image S. Louis.
M. D. C. L. X. I X.
AVEC PRIVILEGE DU ROY.

...de Spinoza

- Spinoza n'a pas publié ses découvertes en Optique. Il les a même détruites. Il n'en reste que quelques traces dans ses correspondances.
- Alexandre Koyré dans son ouvrage célèbre *Du monde clos à l'univers infini*, (Tel Gallimard), a montré indirectement que Spinoza était au cœur de la plus grande transformation des idées de son époque. Descartes, plus prudent, avait imaginé un Monde indéfini, car seul Dieu pouvait être infini pour lui.

Ci-contre : vue de La Haye; (ci-dessous) dessin de l'auteur représentant un marin godillant dans un port.



de Spinoza

- Citation : « *Spinoza long ago wrote of human bondage and human freedom; his form and his language make his thought difficult of access to all but students of philosophy, but the essence of what I wish to convey differs little from what he has said* »
Bertand Russell (*The Conquest of happiness*)

Giovanni Céva (1647-1734)

- Il publie en 1678 (il a 31 ans) le *De linearis rectis*, où il énonce et démontre le théorème du concours des céviennes. En fait, Céva redécouvre ainsi un théorème ancien (qu'il ne pouvait pas connaître) de Ménélaüs d'Alexandrie (70-130 ap. J.C.) dans son *Sphaerica*.
- On appelle « cévienne » une droite passant par le sommet d'un triangle et coupant le côté opposé (ou son prolongement).
- Si (AA') , (BB') , (CC') les céviennes du triangle ABC sont concourantes alors on vérifie la relation:

$$(BA'/A'C)(CB'/B'C)(AC'/C'B)=1$$

Ci-contre université de Pise où Céva a fait ses études.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



- Leibniz est docteur de philosophie à 20 ans, il devient assistant d'un baron allemand, et rencontre, lors d'une mission politique, **Christian Huygens** à Paris qui lui enseignera les mathématiques avancées. Il est avec Newton co-fondateur du calcul différentiel et intégral. Newton a l'antériorité, mais ses écrits mettront plus de temps à être diffusés (en France la marquise du Chatelet fait une traduction des *Principes* en 1756). Leibniz a développé ses idées indépendamment de Newton. Le mathématicien écossais William Wallace (1768-1843) fut le premier à introduire au RU les notations et méthodes de Leibniz.
- **Johann Sébastien Bach** aurait, selon Michel Serres, lu le traité que Leibniz a publié à 20 ans sur l'art combinatoire et s'en serait inspiré pour composer sa grande musique.



Ci-contre timbre représentant l'université de Leipzig où Leibniz a fait ses études.

Leibniz

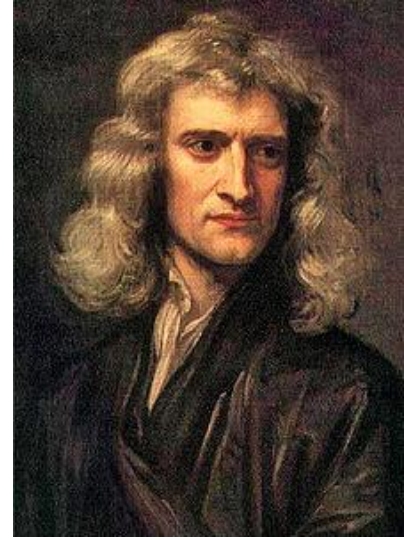
- Formules, théorèmes de Leibniz :
 - Une formule de Leibniz est celle qui permet de calculer la dérivée d'ordre n d'un produit de deux fonctions dérivable, à l'aide du binôme de Newton.
 - Une autre formule, moins connue, est celle qui permet de calculer la dérivée d'une fonction définie par une intégrale définie: $I(\alpha) = \int f(x, \alpha) dx$, sur $[a; b]$. Le calcul de la dérivée, permet de remonter ensuite au calcul de l'intégral, c'est à dire à $I(\alpha)$ dans certains cas.
 - Le théorème de Leibniz appliqué aux séries alternées, c'est-à-dire les sommes de termes qui suivent une progression, et dont les signes positif et négatif alternent. Il permet de dire à quelles condition on peut conclure que la série converge, sa somme est positive et n'est pas supérieure au premier terme.
- En même temps que le japonais Kowa Seki, Leibniz introduit des déterminants de taille supérieure à 2. Les déterminants de taille 2 sont introduits en 1545 par Cardan dans son *Ars Magna* sous la forme de la règle de résolution d'un système de 2 équations à 2 inconnues. (Cependant, les Chinois sont les premiers à utiliser des tableaux de nombre et un algorithme qu'on appelle aujourd'hui la méthode d'élimination Gauss-Jordan)

Ci-contre vue de Hanovre où Leibniz a fini sa vie; en haut portrait de Kawa Seki.



Isaac Newton

(1643-1727)



- Isaac Barrow a été le professeur de Newton qui a écrit *Arithmétique universelle* (1707), et les *Principes de philosophie naturelle* (1686).
- Selon A. Einstein (*Evolution des idées en physique*) c'est l'analyse du vecteur vitesse d'un corps à deux moments séparés par un « très court » intervalle de temps afin de déterminer la direction de la force en un point intermédiaire, qui a conduit Newton, et ensuite Leibniz à découvrir le calcul infinitésimal. Car il s'agit alors d'analyser les expressions intervalle « très court », entre des positions « très proches ».

Ci-contre portrait à 46 ans en 1689, et vue de Londres (St James's Park)



un problème populaire de Newton

- Voici la version de Newton : « On a trois prés d'une qualité égale, et dans lesquels on suppose que l'herbe croît uniformément. Le premier b peut nourrir un nombre de bœufs a pendant le temps c ; le second e peut nourrir un nombre de bœufs d pendant le temps f ; on demande combien le troisième g peut en nourrir pendant le temps h ? »
- Une adaptation du langage algébrique de Newton en langage ordinaire, en remplaçant les lettres par des chiffres, peut donner : « 3 prés couverts d'herbe de même densité et de même vitesse de croissance ont les superficies suivantes : 3ha $\frac{1}{3}$, 10ha et 24 ha. Le premier peut nourrir 12 bœufs pendant 9 semaines. On demande combien de bœufs pourra nourrir le 3^e pré pendant 18 semaines? »

Réponse : 36 bœufs pendant 18 semaines. Newton obtient le même résultat en faisant une application chiffrée après avoir trouvé formule générale suivante : $(bdfgh-acegh-bcdgf+acefg)/(befh-bceh)$ Un avantage du langage algébrique, on le voit dans cet exemple, consiste à s'élever au-dessus des cas particuliers, pour énoncer des lois générales. Ce n'est pas sans limite, comme le soulignera Augustin-Louis Cauchy au 19^e dans son introduction du cours d'Analyse algébrique (1821): « Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre ».

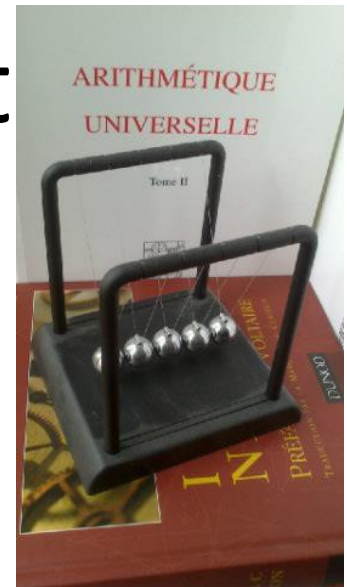
Ci-contre vue de Londres.



L'Analyse est partout

- L'étude des rapports quantitatifs entre les divers phénomènes de la nature pousse à l'étude du lien fonctionnel entre les variables qui caractérisent un phénomène donné.
- Les mathématiques vont permettre, avec l'étude de la variation des fonctions, d'optimiser l'action humaine et utilisant les lois de la nature, à partir du moment où elles sont écrites en langage mathématique. Ainsi on peut résoudre des problèmes techniques :
 - Etudier de la trajectoire d'un projectile lancé dans le vide (Par exemple pour une vitesse initiale donnée, quel est la valeur de l'angle nécessaire pour que la portée soit la plus grande ?)
 - Etudier les vibrations d'un corps reposant sur des ressorts ; etc.
- Une révolution : l'Analyse est née.

Ci-contre : Vue de Londres (Kensington gardens, the serpentine); (en haut à droite) pendule de Newton illustrant la loi action-réaction, loi de conservation de la quantité de mouvement et d'énergie.



Newton et Leibniz

- La formule Newton-Leibniz fournit un moyen pratique de calculer les intégrales définies quand on connaît la primitive de la fonction à intégrer : l'intégrale définie d'une fonction sur un segment $[a ; b]$ est égale à la différence des primitives $F(b)-F(a)$.
- Sans cette formule le calcul d'une intégrale définie comme limite d'une somme intégrale, comme le pratique déjà Archimède dans l'Antiquité, est sujet à des difficultés considérables.
- Avec elle le domaine d'application de l'intégrale définie est considérablement étendue, comme on le voit aujourd'hui dans les domaines technique, mécanique, astronomie...
- *Dans certains cas cette formule reste difficile à appliquer, lorsque la primitive d'une fonction connue ne peut pas s'exprimer au moyen de fonctions élémentaires (par exemple la « fonction dite de Laplace », représentée par une « courbe de Gauss » est une fonction de nature nouvelle), et on emploie des formules permettant de faire une intégration approchée. Ainsi on approche la courbe par des rectangles, ou des trapèzes, ou des paraboles (avec une formule de Thomas Simpson). Dans ce domaine des progrès ont été faits au 19^{ème} siècle avec la formule de Pafnoufi Tchébychev (1821-1894) et les travaux de Alexeï Krylov (1863-1945)*

Ci-contre : vue de Londres (St James Park)



Jean Bernoulli (1667-1748)

- La famille Bernoulli : des mathématiciens et des physiciens suisses sur plusieurs générations.
- Johann (Jean) facilite l'introduction du calcul infinitésimal en France en finançant la publication du traité du marquis **Guillaume de l'Hospital** *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Il est le professeur de maths d'Euler.
- La « **règle de l'Hospital** », par ailleurs, est un théorème qui permettant de lever l'indétermination pour trouver la limite du rapport de deux infiniment petits. Exemple quand on cherche la limite, lorsque x tend vers 0, de la valeur de $(\sin 5x)/(3x)$, il convient de remplacer par les fonctions dérivées correspondantes chaque élément du rapport pour lever l'indétermination.



Ci-contre Jean Bernoulli (gauche) et Guillaume de l'Hospital (droite); Vue de Bâle

Jacob (« Jacques ») Bernoulli (1654-1705)



- La loi de Bernoulli est de lui (*Ars Conjectandi*, 1713), et elle est la loi des probabilités élémentaires :
« *La probabilité que la fréquence des succès observés lors d'une expérience aléatoire à deux issues, s'écarte de la probabilité théorique d'un succès est infime lorsqu'on recommence l'expérience un très grand nombre de fois* ».



Ci-contre : Vue de Bâle.

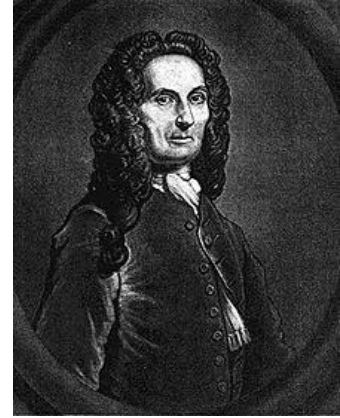
Jacques Bernoulli

- En 1695 il propose une équation différentielle à la communauté scientifique, qui sera résolue un an plus tard par Leibniz. Les équations différentielles ont fait leur apparition dans l'étude du mouvement en Physique (dans la mécanique de Newton on peut formuler une équation différentielle ainsi : $mv'(t)=mg-kv(t)$, où m est la masse d'un corps, $v'(t)$ est la dérivée de $v(t)$ de la vitesse par rapport au temps, ainsi $v'(t)$ représente l'accélération du mouvement, tandis que g est la gravité et k la résistance de l'air). Ces équations mettent en relation une fonction et ses dérivées d'ordre un, deux, ou trois... Résoudre l'équation consiste à trouver la fonction initiale. On définit des équations linéaires de premier ordre qui sont faciles à résoudre.
- La difficulté est que l'équation de Bernoulli n'est pas une équation différentielle linéaire classique. Mais par un changement de variable Leibniz la ramène à une équation linéaire.



Ci-contre : vue de Bâle

Abraham de Moivre (1667-1754)



- Il est coauteur d'une formule d'approximation des factorielles connues sous le nom formule de Stirling (autre auteur): $n! \approx \sqrt{2\pi} \cdot (n/e)^n$
- On lui doit aussi une formule de trigonométrie utilisant les nombres complexes, qui seront redémontrées dans le *Cours l'analyse algébrique* de **Cauchy**. Cette formule montre que quand on élève un nombre complexe à une puissance entière positive, le module de ce nombre est élevé à cette puissance et l'argument est multiplié par l'exposant de cette puissance: $[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Cette formule s'inscrit à la suite de la découverte des nombres imaginaires par **Bombelli** dont **Wallis** (infra) mettra en évidence la représentation graphique. Il s'agit pour de Moivre de mettre en évidence les règles d'opération sur ces nombre (addition, soustraction, multiplication, division, élévation à la puissance, extraction de racines).



Ci-contre : Vue de Vitry le Francois dont de Moivre est originaire

de Moivre

- Il étudie aussi le comportement de la loi binomiale dans le cas d'une expérience aléatoire simple, comme le lancer d'une pièce de monnaie avec la probabilité d'avoir un succès (Pile, par exemple) constante, $p=1/2$, lorsque n (le nombre de fois qu'une expérience aléatoire est répétée) tend vers l'infini.



Ci-contre vue de Londres où de Moivre a vécu.

Problème de de Moivre

- Calculer les racines cubiques de l'unité : « *Quels sont les nombres qui élevés à la puissance 3 donnent 1 comme résultat? »*. Tout le monde pense à une solution (1 à la puissance 3 donne 1), mais si on cherche parmi les nombres imaginaires il y a encore 2 autres solutions. Il y a 3 solutions.

Réponse: $x'=1$; $x''=-1/2 + i\sqrt{3}/2$; $x'''=-1/2 - i\sqrt{3}/2$.



Problème de de Moivre

- Résoudre dans l'ensemble des complexes l'équation binôme : $x^4=1$. Encore une fois tout le monde pense à une solution (1 à la puissance 4 donne 1). Mais, il y a 4 solutions dans l'ensemble des imaginaires.

Réponse: $x'=1$; $x''=i$; $x'''=-1$; $x''''=-i$



Brook Taylor (1685-1731)



- Mathématicien anglais (Londres) qui établit la formule dite de Taylor en 1715: Une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point peut être approximée par une fonction polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point :
- Soit f une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, et dérivable jusqu'à n au point d'abscisse a , pour tout x de I , l'expression $f(x) = f(a) + [f'(a)/1!](x-a) + [f''(a)/2!](x-a)^2 + [f^{(n)}(a)/n!](x-a)^n + R(x)$ définit un reste $R(x) \approx (x-a)^{n+1}$ avec plusieurs formules différentes pour estimer ce reste (Taylor-Young; Taylor-Lagrange; Taylor-Cauchy; Taylor-Laplace).
- Ce qui permet de calculer une valeur approchée de certains nombres irrationnels et transcendants tels que $e \approx 2,71828$ (à 0,00001 près) ; sinus de $20^\circ \approx 0,342$ (à 0,001 près) ...etc.



Colin Mac Laurin (1698-1746)

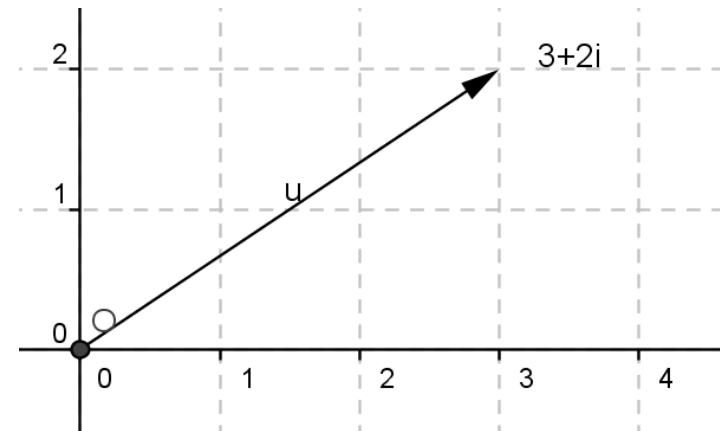


- Mathématicien écossais de l'université d'Edimbourg. Il écrit en 1742 un traité des Fluxions, exposé systématique des méthodes de Newton, en réponse aux attaques de G. Berkeley sur le manque de rigueur et de fondement. Il trouva une formule qui est un cas particulier, un corollaire, de la formule de Taylor. On lui doit aussi un mémoire sur les marées pour lequel il reçut un prix de l'Académie royale des sciences à égalité avec Leonhard Euler et Daniel Bernoulli. Il est membre de la Royal Society en 1719. En 1748 un traité d'algèbre posthume relance la théorie des déterminants avec l'écriture correcte de la solution d'un système de 4 équations à 4 inconnues.

John Wallis (1616-1703)



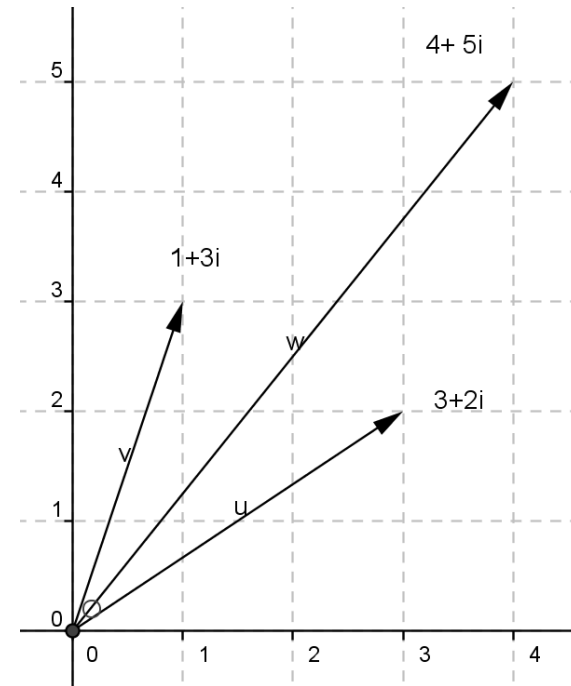
- Après la guerre civile anglaise, il fonde la Royal Society centre d'activité scientifique en Grande Bretagne
- John Wallis en 1685 a montré qu'il était possible de donner une réalité aux nombres imaginaires utilisés par les algébristes italiens de la Renaissance. Leurs calculs ne seront alors pas seulement juste, mais exacts, et ils pourront se généraliser par la suite à d'autres ensembles de nombres.
- Il s'agit de représenter ces nombres imaginaires comme des « vecteurs » dans un repère du plan muni d'un axe de nombres réels et d'un axe de nombres imaginaires. Les nombres imaginaires acquièrent alors le titre de « nombres complexes » (on leur reconnaît ainsi une certaine réalité).
- Un vecteur est une notion mathématique introduite d'abord par la physique et qu'on ne peut décrire par un simple nombre. Ainsi la définition d'A. Einstein et Infeld : « *Pour caractériser une vitesse, par exemple, une direction est aussi essentielle qu'un nombre. Une telle quantité qui possède aussi bien une grandeur qu'une direction est appelée vecteur. Le symbole approprié pour le représenter est une flèche* » in *Evolution des idées en physique*.



Ci-contre université de Cambridge où Wallis a fait ses études.

John Wallis (1616-1703)

- En France cette invention est attribuée à Argand en 1806.
- *Ci-contre représentation du nombre complexe $3 + 2i$
Le vecteur de coordonnées 3 et 2 représente le nombre imaginaire graphiquement.*
- *Partant de là il est possible d'additionner des nombres complexes entre eux comme des vecteurs, et de les multiplier entre eux comme des nombres réels en ajoutant la règle $i^2 = -1$. Comme pour les nombres réels un produit est nul ssi l'un des facteurs est nul.*
- *On lui doit également la « formule de Wallis » qui permet de calculer une approximation de $\pi/2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots \frac{2n}{(2n-1)} \cdot \frac{2n}{(2n+1)} \dots$*
- *(uniquement des nombres pairs aux numérateurs qui se répète 2 fois de suite et des nombres impairs aux dénominateurs qui se répètent deux fois de suite, en décalage)*



Ci-contre : Vue de l'université de Cambridge

Gabriel Cramer (1704-1752)



- Mathématicien suisse spécialisé sur les courbes ayant une équation polynomiale (le cercle, les coniques). En 1750 Cramer formule des règles permettant de résoudre des systèmes de n équations et n inconnues (sans donner de démonstration). Les méthodes de calcul des déterminants sont alors sophistiquées, puisque fondées sur la notion de signature d'une permutation.
- Les mathématiciens tels que Bézout, Vandermonde, Gauss, Laplace, Lagrange s'emparent de ce nouvel objet qui annonce l'utilisation des matrices dans les mathématiques modernes.

IV. Extinction des idées reçues.

- 1) Il n'y a pas de femmes mathématiciennes : faux, voyez la suite.
- 2) d'Alembert est un philosophe des Lumières, et non pas un mathématicien important: faux, voyez la suite.
- 3) Napoléon n'est pas un mathématicien important: faux, voyez la suite.
- 4) « ..*Aucun ouvrage des hommes n'est fait pour l'immortalité* » Article Fondation, Turgot, *Encyclopédie* de d'Alembert et Diderot.

Jean le Rond d'Alembert (1717- 1783)



- Malgré des début difficiles (enfant abandonné à la naissance), il fit preuve d'une **grande intuition** scientifique à son époque puisqu'il démontra de nombreux résultats et en conjectura d'autres qui furent démontrés par la suite.
- Mathématicien, écrivain, philosophe, il créa avec Diderot *l'Encyclopédie* en 1779.
- Sa principale contribution en mathématiques est l'énoncé du théorème fondamental de l'algèbre : « *Le corps des complexes est algébriquement clos* ». Autrement dit, toute fonction rationnelle entière $f(x)$ a au moins une racine réelle ou complexe.
- La démonstration de d'Alembert est alors incomplète, ou fausse, et **Carl Gauss** en 1799 publiera la première démonstration complète (3 autres preuves suivront au 19^e s.)

*Ci-contre portrait de 1753 par Quentin de la Tour;
(bas) Académie des sciences à Paris où il a
été nommé*



Théorème de d'Alembert sur les séries de termes positifs.

- Une série étant une somme de termes qui sont reliés entre eux par le procédé d'une suite.
- La règle : si le rapport entre un terme et le terme qui précède a une limite finie (différente de 1) lorsqu'on prend le rang du terme aussi grand qu'on veut, alors si cette limite est positive la série converge, et si elle est négative la série diverge. Si la limite tend vers 1 on ne peut rien dire.
- C'est un théorème qu'on démontre à l'université (en licence), mais pas au lycée.



Sophie Germain (1776-1831) et les autres

- Théorème : Démontrer que tout nombre de la forme $a^4 + 4$ est un nombre divisible (si a n'est pas égal à 1).

Conseil : montrer que $a^4 + 4$ peut se pêtre sous la forme d'un produit de facteurs dont aucun n'est égal ni au nombre lui-même, ni à 1.

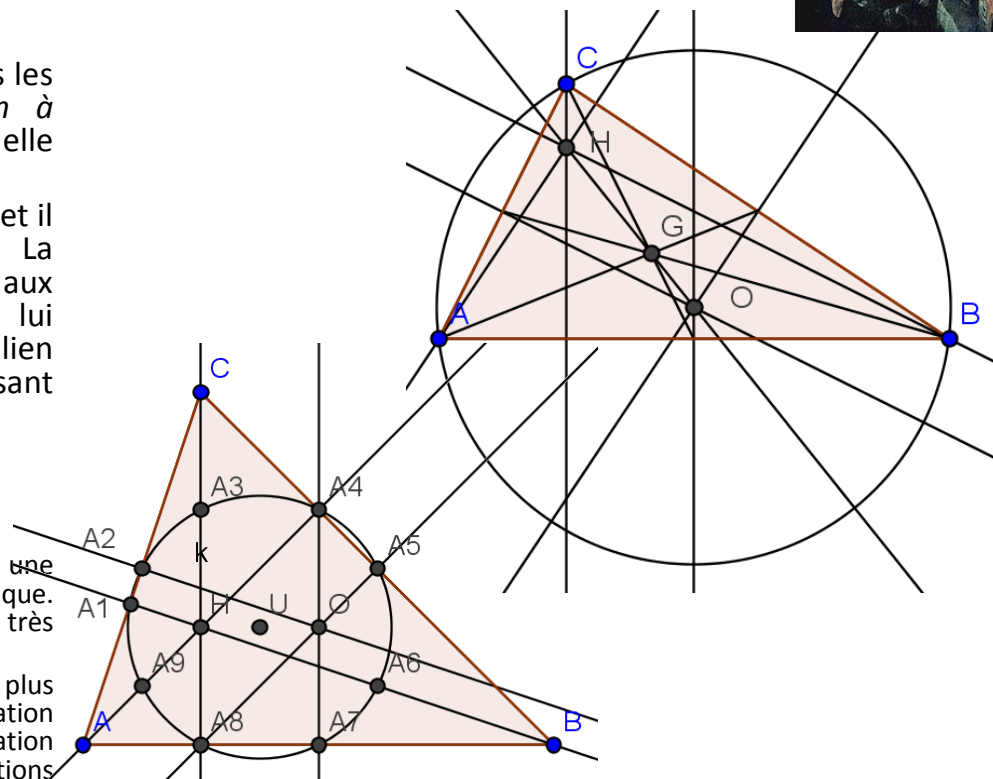
Ci-contre : (en haut, à gauche) Sophie Germain; (haut, à droite) Emilie, marquise du Chatelet (1706-1749) c'est elle qui a traduite les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* de Newton (*Principia Mathematica*) en français, et on n'a pas fait mieux depuis; (en bas, à gauche) Maria-Gaëtana Agnesi (née et morte à Milan 1718-1799) elle est l'aînée de 21 enfants (son père s'est marié 3 fois), et à 9 ans elle traduit en latin un essai sur l'éducation des femmes; à 20 ans elle s'enthousiasme pour le système de Newton, et en 1749 elle publie un manuel de calcul différentiel en 2 volumes. Le pape Benoît XIV lui offre une chaire de professeur de mathématiques à Bologne, qu'elle refuse pour mener une vie simple; (en bas à droite) La reine Christine en conversation avec R. Descartes (1626-1689).



Leonhard Euler (1707- 1783)



- Il est le mathématicien le plus prolifique de tous les temps: 74 volumes écrits (Son *Introduction à l'Analyse infinitésimale* comporte 2 tomes à elle seule).
- Il fait de la fonction le sujet propre de l'Analyse, et il introduit les fonctions trigonométriques. La trigonométrie n'est plus une simple annexe aux mathématiques, importé de l'astronomie. On lui doit, bien sûr, la formule d'Euler qui exprime le lien entre la fonction exponentielle à l'exposant imaginaire et les fonctions trigonométriques:
 - $\cos \phi = (e^{i\phi} + e^{-i\phi})/2$;
 - $\sin \phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i$
- Nous lui devons les notations : $f(x)$, e , i ...
- Il a été l'élève de **Jean Bernoulli**, et son œuvre opère une synthèse de Newton et Leibniz en analyse mathématique. **Evariste Galois** au XIXème siècle lira son œuvre complète très jeune.
- Il est à l'origine également de la plus ancienne et la plus simple méthode de résolution approximative d'une équation différentielle d'ordre un. Les méthodes d'intégration approchée sont ce qui reste lorsque les équations différentielles ne s'expriment pas par des fonctions élémentaires, mais elles sont incommodes en mécanique pour faire des prévisions.



Ci-contre la droite d'Euler (OG) passant par H, avec $OG=OH/3$, et le cercle à 9 points de centre U (milieu de [OH]) passant par le milieu des côtés passe aussi par les pieds des hauteurs et les milieux des segments entre H et les sommets.; (bas) vue de Bâle



Euler

- La méthode d'intégration par changement de variable est l'une des méthodes les plus importantes du calcul des « intégrales indéfinies », autrement dit du calcul de la fonction primitive d'une fonction donnée. Le succès de l'intégration dépend fréquemment de notre habileté à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs. Pour cela Euler nous enseigne à effectuer des changements de variables pour ramener l'intégration d'une fonction irrationnelle à l'intégration d'une fonction rationnelle.
- Calculer l'intégrale $\int dx/\sqrt{x^2+3x-4}$

Réponse : $\text{Log} \left| \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1}} \right| + C$

Ci-contre vue de Saint Petersburg où il finit sa vie.



Le problème d'Euler

- Voici le problème, extrait de l'Introduction à l'algèbre d'Euler, qui avait tant impressionné le jeune Stendhal: « Deux paysannes ont apporté au marché ensemble 100 œufs. L'une d'elles avait un plus grand nombre d'œufs que l'autre, mais toutes les deux ont reçu la même somme. La première a dit alors à la seconde : « Si j'avais eu tes œufs, j'aurais reçu 15 kreutzers ». L'autre a répondu : « Et si moi, j'avais eu tes œufs, j'aurais reçu 6 kreutzers et $\frac{2}{3}$ ». Combien d'œufs avait chaque paysanne? ».

Réponse : 40 et 60

Ci-contre : Vue de Saint Petersburg



Problème d'Euler

- Les « formules d'Euler » permettent d'aborder de questions du type:
« *Mettre sous forme exponentielle les nombres: 1; i; -2; -i* »

Réponse : $1 = e^{(2k\pi i)}$; $i = e^{(i\pi/2)}$; $-2 = 2e^{(i\pi)}$; $-i = e^{(-i\pi/2)}$

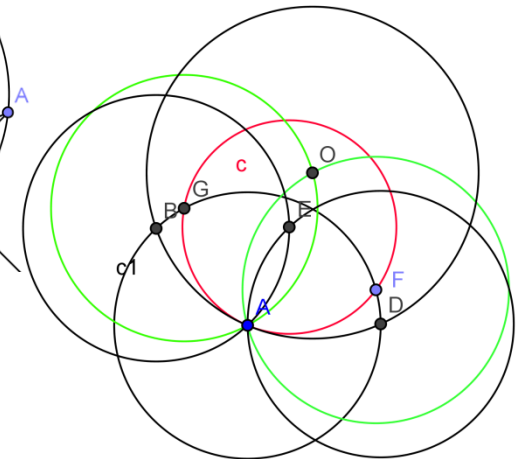
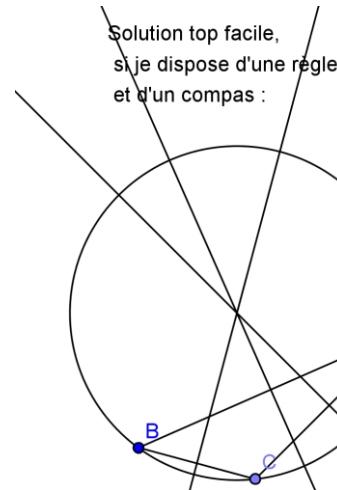


Mascheroni, Napoléon,



- Voilà le problème que résout Mascheroni en 1797: « *Un cercle est tracé sur une feuille de papier. Vous disposez d'un compas (il n'est pas ouvert à la bonne dimension). Comment retrouver le centre du cercle?* »
- Napoléon Bonaparte rencontre Mascheroni lors de la campagne d'Italie, et de retour en France, Napoléon propose une solution personnelle à ce problème auquel son nom demeure attaché.
- Lagrange aurait répondu : « *Nous attendions tout de vous, mon Général, mais pas une leçon de géométrie* ».

Ci-contre Lorenzo Mascheroni (1750-1800); (bas) Vue de Bergame (Italie) ville de naissance de Mascheroni

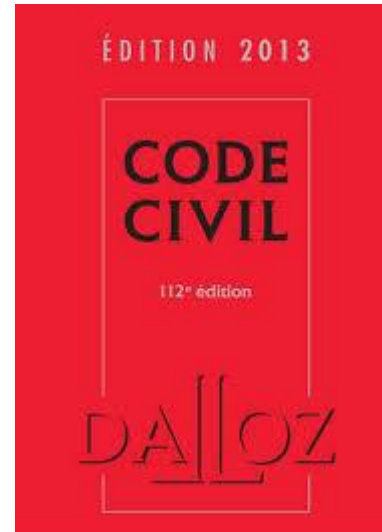


Le point recherché est E (centre du cercle rouge), intersection des cercles de centre B et D passant par A. On commence par placer A et F quelconques sur le cercle rouge puis C1 de centre A passant par F



Napoléon (1779-1821)

- Napoléon est surtout un grand mathématicien dans la mesure où il a fait un code civil, qui par comparaison avec le droit anglais, fait dire que le droit français est **cartésien**.
- Le droit anglais apparaît plus empirique, alors que le code civil français envisage systématiquement un évènement, puis son contraire.



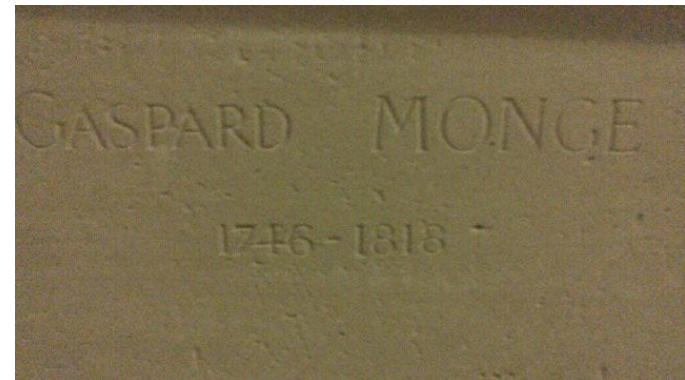
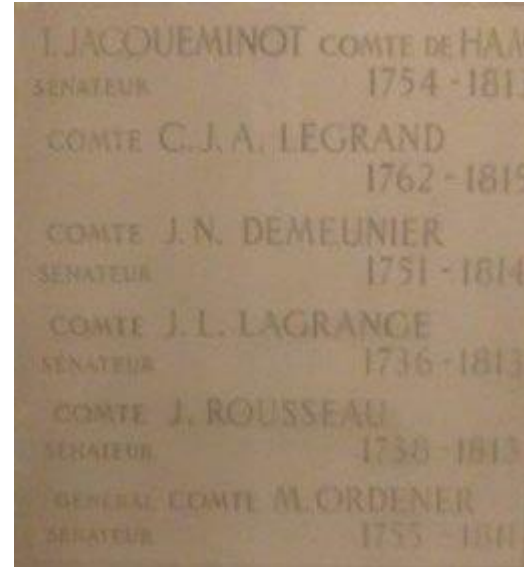
Ci-contre (haut) code civil français; (bas) représentation du Léviathan de Hobbes.



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

- Lagrange enseigne à Polytechnique à Paris. Il connaît les résultats des italiens sur la résolution d'équations de degré 3 et 4, cependant il doute qu'on puisse résoudre des équations de degré 5 ou plus. Ce que **Evariste Galois** montrera.
- Il a eu un rôle de sénateur sous Napoléon, il est au Panthéon. Il y a très peu de mathématiciens au Panthéon, avec **Gaspard Monge**, c'est tout (si l'on ne compte pas autres branches de la science physique). Peut-être qu'ils sont trop « réalistes » finalement. Il faut reconnaître à Lagrange des méthodes alternatives à celles de **Newton**, ce n'est pas rien :
 - La méthode des cordes (en concurrence avec la méthode des tangentes de Newton)
 - La formule d'interpolation de Lagrange (en concurrence avec celle de Newton)
- C'est pourquoi, «il n'y a pas la place dans la grange » (c'était facile)
- Les études de Lagrange annoncent les travaux d'Evariste Galois en présumant que les équation de degré supérieur à 4 ne sont pas résolubles par la méthode des radicaux.

Ci-contre : Liste à l'entrée du caveau II du Panthéon, et cercueil en pierre de Monge au caveau VII (dont il reste une tombe au cimetière du Père Lachaise); (en haut à droite) Pendule de Foucault au Panthéon de Paris qui met en évidence la rotation de la Terre par rapport à un référentiel galiléen (Léon Foucault physicien français 1819-1868).

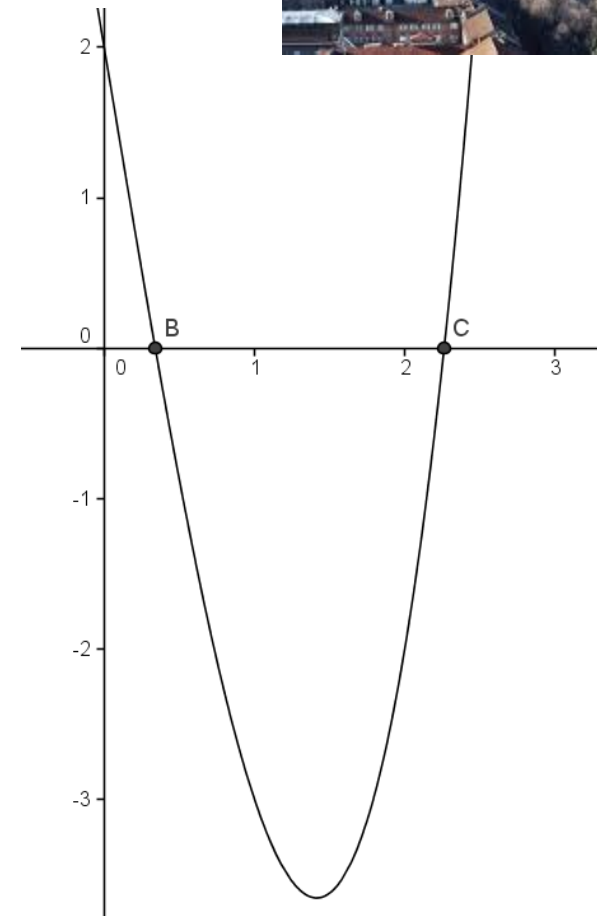


Problème Lagrange et Newton



- L'étude de la variation des fonctions permet de calculer les valeurs approchées des racines de l'équation $f(x)=0$.
- Exemple : Trouver les racines de l'équation $f(x)=x^3 - 6x + 2 = 0$.
- Traduction : Si on représente la courbe de la fonction f dans un plan muni d'un repère Oxy , alors « trouver les racines » cela revient à trouver l'abscisse des points d'intersection entre la courbe et l'axe Ox .
- Résumé de la solution de Newton (« méthode des tangentes ») dans l'intervalle $(0;1)$:
 - $f(0)=2$;
 - $f'(x)=3x^2 - 6$,
 - donc $f'(0)= -6$;
 - $f''(x)=6x$ (≥ 0).
 - donc $XB = 0 - 2/(-6) = 1/3 = 0,333$

Ci-contre : il s'agit de trouver la position du point B dans l'intervalle $(0;1)$ sur l'axe horizontal, par exemple.; (haut) vue de Turin, ville originaire de Lagrange



L'interpolation d'une fonction

- Le problème de l'interpolation d'une fonction est important dans l'étude des phénomènes naturels : supposons qu'en étudiant un certain phénomène, on ait démontré l'existence d'une dépendance fonctionnelle entre des grandeurs variables x et y exprimant des aspects quantitatifs de ce phénomène, mais que la fonction $y=f(x)$ qui les relie ne soit pas connue. Seule est connue une série de couples de valeurs.
- On demande alors de trouver un polynôme $P(x)$ qui exprime de manière approchée la fonction $f(x)$. C'est ce qu'on appelle « l'interpolation de la fonction ».
- C'est un problème « hyperclassique » dans l'étude mathématique des phénomènes naturels.

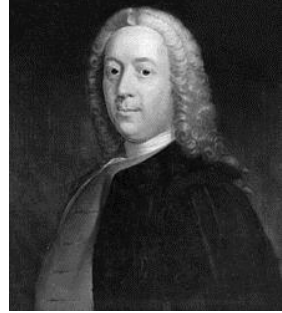
Autres contributions

- La première chose qu'on apprend de Lagrange est son théorème des accroissements finis, auquel on peut donner une interprétation géométrique simple. *Si la fonction $f(x)$ est continue sur un segment $[a; b]$, et dérivable en tout point intérieur de ce segment, il existe alors au moins un point M sur la courbe représentant f , ayant pour abscisse c intérieur à $(a; b)$, tel que le coefficient directeur de la tangente au point M soit égal au coefficient directeur de la droite passant par A et B les extrémités de la courbe.*
- Un peu plus pointue est sans doute l'étude des équations différentielles de Lagrange, dont les équations différentielles de Clairaut ne sont que des cas particuliers : la méthode de résolution conduit à révéler non seulement une solution générale, et des solutions particulières en fonction de la connaissance de la situation initiale, mais aussi une solution singulière qui ne peut pas se déduire de la solution générale et qui enveloppe toutes les solutions contenues dans la solution générale.

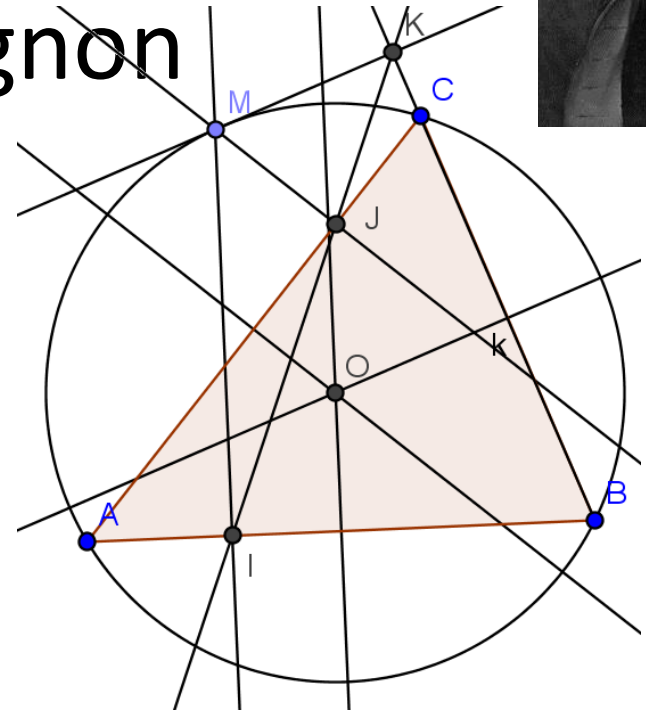
Mascheroni

- En 1672, le mathématicien danois Georg Mohr a démontré dans son ouvrage *Euclides danicus* le théorème suivant : toute construction géométrique réalisable à l'aide de la règle et du compas peut être obtenue à l'aide du compas seul. Le livre de Mohr fut malheureusement ignoré et tomba dans l'oubli.
- Il faut attendre 125 ans pour qu'un italien, l'abbé Lorenzo Mascheroni (1750-1800) redécouvre ce théorème et le publie dans sa *Géométrie du compas* (1797).
- Ce n'est qu'en 1928 qu'un étudiant a retrouvé le livre de Mohr chez un bouquiniste.

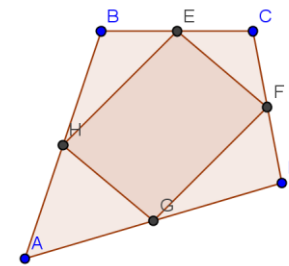
Robert Simson, Pierre Varignon



- Simson (1687-1768) est un mathématicien écossais, et le premier à traduire les *Eléments* d'Euclide en anglais (Les temps ont bien changé, car aujourd'hui un grand nombre d'ouvrages fondamentaux de l'antiquité ne sont accessible qu'en anglais). Simson montre aussi que le rapport de 2 nombres consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers le nombre Phi.
- Varignon (1654-1722) est un mathématicien français contemporain. Chacun découvre des propriétés nouvelles en géométrie.



Ci-contre la droite Simson en haut (les projetés orthogonaux d'un point M quelconque pris sur le cercle circonscrit au triangle, sur les côtés du triangle sont toujours alignés. I,J,K alignés), et le parallélogramme de Varignon en bas (en joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque on obtient un parallélogramme); (bas) Vue de Caen, ville de Varignon



Michel Rolle (1652-1719)



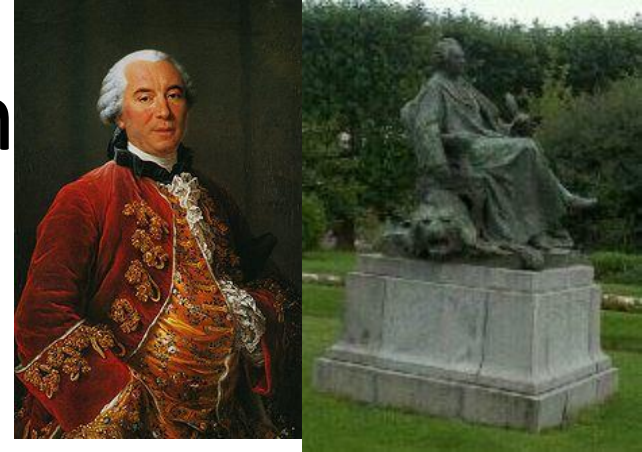
- Il s'engagera en 1700 dans une violente polémique contre le calcul infinitésimal en rédigeant 5 mémoires à l'Académie des sciences à Paris, auxquels Pierre Varignon répliquera par 6 mémoires. Rolle reconnaîtra son erreur en 1706. Il ne s'arrêtera pas là car il est connu par un théorème sur les racines de la dérivée « **théorème de Rolle** ».
- La racine d'une fonction $f(x)$ est le nombre c qui vérifie l'équation $f(c)=0$. Il peut y en avoir plusieurs.
- *L'interprétation géométrique du théorème de Rolle consiste à dire que si une courbe continue ayant une tangente en chaque point coupe l'axe (Ox) aux points d'abscisses a et b , alors il existe au moins un point d'abscisse c intérieur à l'intervalle $(a;b)$ tel que la tangente en ce point soit parallèle à (Ox). Si la courbe n'a pas de tangente en certains points le théorème peut cesser d'être vrai.*



Ci-contre : vue de la ville d'Ambert dont Rolle est originaire.



Georges Buffon (1707-1788)



- Son premier livre publié en France est une traduction de l'anglais. L'anglais est en passe de devenir la langue de communication scientifique alors que le français occupe encore une place l'honneur (Euler écrit toujours en latin).
- Connus surtout comme naturaliste, il est un esprit des « Lumières », et son ouvrage principal *l'histoire naturelle* a connu un succès comparable à celui de *l'Encyclopédie* de Diderot. Or, il s'est intéressé aussi au calcul des probabilités.
- On lui doit un résultat étonnant : « Si on lance une aiguille de longueur L au hasard sur un parquet dont les lattes ont une largeur égale à a , a étant supérieur à L , alors la probabilité que l'aiguille soit à cheval sur deux lattes est $(2L)/(a\pi)$. »
- Il suffit de lancer un très grand nombre de fois une aiguille, selon la loi Bernoulli, pour obtenir une valeur approchée de π .

*Ci-contre (droite) Buffon au jardin des plantes, Paris;
(bas) Royal Society Londres (il est aussi à
l'Académie des Sciences de Paris).*



Thomas Bayes (1702-1764)



- Il est un prêtre anglican, et ardent défenseur des idées de Newton. Ce qui lui vaut de violents échanges avec l'évêque Berkeley, mais ne l'empêchera pas d'être élu membre de la Royal Society (équivalent de l'Académie des sciences au R-U.)
- Les élèves de terminale lui doivent la première formule de probabilité conditionnelle qu'ils apprennent, et permettant de calculer la probabilité d'un événement donné sachant qu'un autre événement est déjà réalisé.

Ci-contre : logo de l'université de Berkeley (Californie); portrait de Thomas Bayes ; (bas) Université d'Edimbourg où Bayes fit sa formation.



Pierre-Simon Laplace (1749-1827)



- Laplace a écrit la *Théorie analytique des probabilités* en 1812, où il énonce la loi Laplace, (une généralisation des résultats de de Moivre)
- Laplace propose des méthodes pratiques, pour faciliter l'échantillonnage en statistiques, mais qui n'ont pas beaucoup de succès, pour éviter aux statistiques de se baser sur des recensements exhaustifs. Pour cela il faudrait bien choisir l'échantillon représentatif, et calculer le risque d'erreur en utilisant le probabilités.
- Il a surtout définie une fonction représentée par une « courbe de Gauss » et énoncé un théorème qui s'applique lorsqu'on veut déterminer la probabilité pour que sur 1000 pièces prises au hasard le nombre de pièces défectueuses ne soit pas supérieur à 20, quand la probabilité du rebut lors de la fabrication de ces pièces est de 0,01.
- Pour les besoins de la mécanique newtonienne « l'équation de Laplace » a aussi été introduite. Elle apparait aussi aujourd'hui dans de nombreuses autres branches de la physique théorique : astronomie; électrostatique; mécanique des fluides; propagation de la chaleur; diffusion; mouvement brownien; mécanique quantique. Les solutions de l'équation sont des fonctions dites harmoniques.



Ci-contre : Vue de Beaumont en Auge (proche de Caen) ville originaire de Laplace

Etienne Bézout (1730-1783)



- Un théorème de Bézout (ou plutôt de Bachet) permet la résolution de certaines équations de Diophante.

- Dans les deSelon les cas pour résoudre ces équations on applique aujourd'hui, (depuis le 18^es) soit le théorème de Bézout, soit le théorème de Gauss qui permettent de généraliser une première solution. (Lorsque la forme de l'équation est: $ax+by=c$, on applique Bézout! Et, lorsque l'équation est de la forme : $ax+by=0$, on applique Gauss!)
- ux cas on commence par vérifier si a et b son premiers entre eux, PGCD (a, b)=1 ? Le théorème donne une méthode qui permet d'obtenir un résultat général à l'aide d'une seule solution qu'on peut trouver en traçant la droite correspondante.

- Un autre théorème de Bézout célèbre concerne la décomposition d'un polynôme en facteurs : Le reste de la division du polynôme $f(x)$ par le monôme $(x-a)$ est égal à $f(a)$.

Ci-contre : Vue de Nemours, ville originaire de Etienne Bézout.

Théo de Bézout	Remarque
a et b sont deux nombres premiers entre eux ssi il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv=1$	Pour déterminer u et v on utilise l'algorithme d'Euclide.



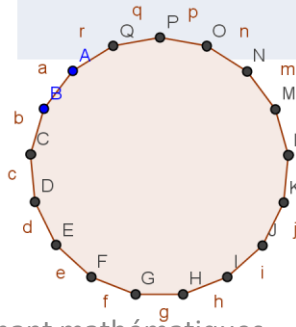
Carl Gauss (1777-1855): « le prince des mathématiciens ».



- Gauss mathématicien précoce, avant la naissance des mathématiques modernes, a ouvert la voie dans toutes les branches qui se déploieront au XIX^e siècle.
- Grâce à ses études sur les équations on sait que le polygone régulier à n côtés n'est constructible à la règle et au compas que si $n = 2^m \times p(1) \times p(2) \times p(3) \times \dots \times p(k)$, où m est un entier naturel, et les $p(i)$ sont des nombres premiers de Fermat.
- On appelle nombre premier de Fermat les nombres qui s'écrivent $F(n) = 2^{2^n} + 1$. Fermat pensait que c'était tous des nombres premiers. Ainsi $F(1) = 2^2 + 1 = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4) = 65537$ sont des nombres premiers.
- Pourtant, Euler a montré que $F(5)$ n'est pas un nombre premier, car $F(5) = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$

Ci-contre polygone à 17 côtés; (droite) vue de Brunswick la ville de Carl Gauss

Lorsqu'il était écolier Gauss trouva une astuce pour calculer une somme	$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 29 + 30 + 31$
On peut écrire la même somme à l'envers	$S = 31 + 30 + 29 + \dots + 3 + 2 + 1.$
Si on additionne les deux sommes	$2S = (1+31) + (2+30) + \dots + (29+3) + (30+2) + (31+1) = 31 \times 32 = 992$, d'où $S = 496$



Carl Gauss

- En 1801 Gauss découvre par le calcul l'astéroïde Cérès.
- On lui doit aussi le « pivot de Gauss » méthode de résolution des systèmes de 3 équations du premier degré à 3 inconnues.

Ci-contre : Vue de Brunswick

Le pivot de Gauss pour résoudre le système :

Ligne 1 (L1)	$3x+2y+z=5$
Ligne 2 (L2)	$2x+3y+z = 1$
Ligne 3 (L3)	$2x+y+3z=11$
$(L'2)= L2-L3 :$	$0 + 2y -2z=-10$
$(L'3)= L3-(2/3)L1:$	$0 - y + 7z=23$
$(L''2)= L'2+ 2L'3$	$0 + 0 + 12z=36,$ donc $z=3$

On en déduit y et x sans difficulté.



-

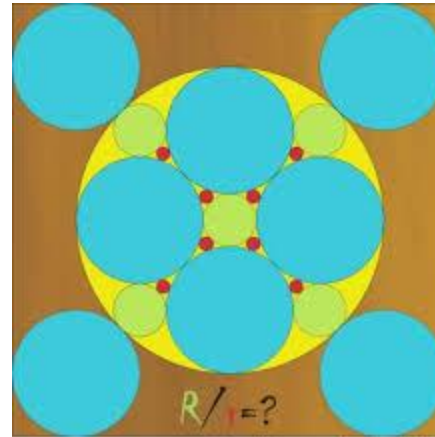
Gwendal Idot-Enseignant mathématiques-
Conférencier- Université Paris Loisirs

Un nouvel élan d'Orient : les « *Sangakus* » japonais

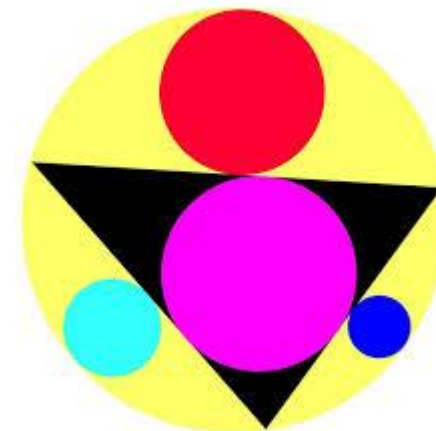
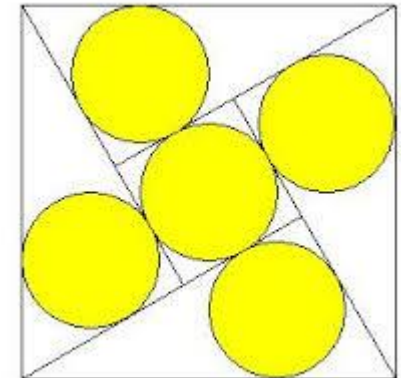


- En japonais, « sangaku » signifie « mathématiques » ou la « montagne », selon le contexte.
- Sur des panneaux accrochés dans les temples japonais on découvre des figures peintes qui posent des problèmes de géométrie.
- Il en reste près de 817 exemplaires qui ont survécus à la guerre et aux séismes, et qui représentent une tradition qui remonte au 17^e siècle. L'époque des samouraïs.
- Les maîtres des grandes écoles de mathématiques se faisaient entre eux régulièrement des défis publics pour attirer plus d'élèves dans leurs écoles.
- Les problèmes japonais évoquent la « géométrie de position » dont rêvait Lazare Carnot (1753-1823)

Ci-contre : exemples de Sangakus japonais; (haut) Lazare Carnot (père de Sadi Carnot, le physicien)



Géry Huvent- Epsilon Maths



V. Conclusion.

- Un ordinateur capable d'intuition serait un ordinateur capable de reproduire, par exemple, la démarche d'A. Wiles, qui n'utilise jamais d'ordinateur, et préfère « gribouiller », « griffonner » des choses, selon ses expressions.
- Ce serait un ordinateur donc capable de faire comme Wiles, et trouver des schémas, et faire des calculs pour expliquer tel ou tel élément des mathématiques, et essayer de les intégrer dans des concepts donnés plus généraux de telle ou telle branche des mathématiques.

V. Conclusion

- Parfois l'ordinateur devrait consulter des ouvrages pour voir comment ils font.
- Parfois il faudrait juste qu'il modifie un peu, ou fasse des calculs supplémentaires pour que cela marche.
- Mais parfois rien de ce qui a été fait jusque là ne lui sera d'une quelconque utilité et il devra trouver une approche nouvelle.

V. Conclusion

- Il faudrait déjà qu'un ordinateur puisse vérifier la preuve d'A. Wiles. On n'en est même pas là encore.
- C'est pourquoi la vraie question n'est pas de rendre les ordinateurs spontanés, mais de les rendre formateurs pour que l'intuition soit plus efficace.